Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Professur für Mathematische Informationswissenschaften
Prof. Dr. Helmut Bölcskei

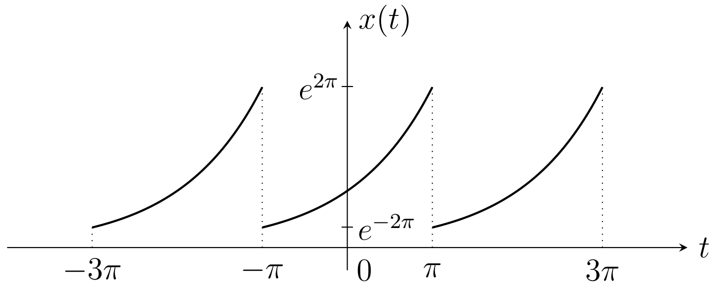
Klausur zu Signal- und Systemtheorie I

26. August 2024

- Bitte blättern Sie diese Seite nicht um, bevor die Prüfung offiziell beginnt.
- Dieses Angabenheft hat 7 nummerierte Seiten (inklusive dieser). Kontrollieren Sie bitte sorgfältig, ob Sie alle Seiten erhalten haben.

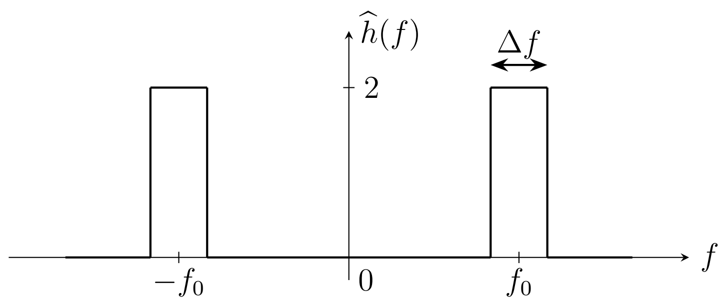
Aufgabe 1 (25 Punkte)

(a) (11 Punkte) Gegeben sei das periodische Signal $x(t)$ mit der Periode $T = 2\pi$, wobei $x(t) = e^{2t}$ für $-\pi < t \leq \pi$.



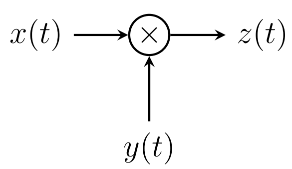
★ i. (3 Punkte) Bestimmen Sie die Koeffizienten c_k der Fourierreihe von $x(t)$.

★ ii. (8 Punkte) Das Signal $x(t)$ liegt am Eingang eines idealen Bandpassfilters mit der Mittenfrequenz $f_0 = \frac{3}{T}$ und der einseitigen Bandbreite $\Delta f = \frac{1}{T}$ (s. Abbildung) an. Der Frequenzgang des Bandpassfilters ist in der folgenden Abbildung dargestellt.



Bestimmen Sie das zum Eingangssignal $x(t)$ gehörige Ausgangssignal $y(t)$ des Bandpassfilters.

(b) (9 Punkte) Die Signale $x(t) = A\cos(2\pi t/T_a)$ und $y(t) = B\cos(2\pi t/T_b)$ liegen an den Eingängen des folgenden Multiplikators an.



Für die Beziehung zwischen den Perioden T_a und T_b sind folgende drei Fälle gegeben:

★ i. (3 Punkte) $T_a = T_b$

★ ii. (3 Punkte) $T_a = \frac{1}{2}T_b$

★ iii. (3 Punkte) $T_a = 2T_b$

Bestimmen Sie jeweils die Periode T von $z(t)$. Bestimmen Sie zudem die Koeffizienten c_k der Fourierreihe $z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi ikt/T}$.

Hinweis: Verwenden Sie die trigonometrische Gleichung

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) + \cos(x+y)\right).$$

(c) (5 Punkte) Gegeben sei das LTI-System H mit der Impulsantwort

$$h(t) = e^{-t/T}\sigma(t), \quad \text{mit} \quad T > 0,$$

wobei

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}.$$

Am Eingang von H liegt das Signal

$$x(t) = \delta(t) + \delta(t-2T) + \delta(t-4T).$$

★ i. (2 Punkte) Bestimmen Sie das zu $x(t)$ gehörige Ausgangssignal $y(t)$ des Systems H.

ii. (3 Punkte) Skizzieren Sie das Ausgangssignal $y(t)$. Bitte beschriften Sie die Achsen in Ihrer Skizze.

Aufgabe 2 (25 Punkte)

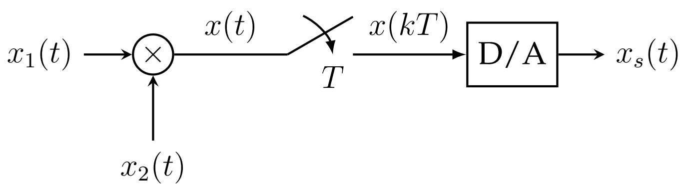
(a) (16 Punkte) Gegeben seien die zeitkontinuierlichen Signale

$$x_1(t) = \frac{\sin(2000\pi t)}{\pi t}$$

und

$$x_2(t) = \frac{\sin(4000\pi t)}{\pi t},$$

welche an folgendem System anliegen,



wobei $T > 0$ die Abtastperiode ist. Der D/A-Wandler hat die Eingangs-Ausgangsbeziehung

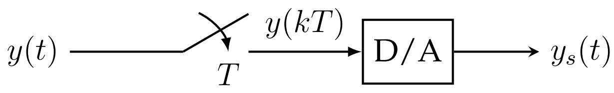
$$x_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\delta(t - kT).$$

★ i. (9 Punkte) Berechnen und skizzieren Sie $\widehat{x}(f)$. Bitte beschriften Sie die Achsen in Ihrer Skizze.

ii. (3 Punkte) Geben Sie die maximale Abtastperiode $T_{\max}$ an, so dass $x(t)$ eindeutig aus $x(kT)$, $k \in \mathbb{Z}$, rekonstruiert werden kann. Begründen Sie Ihre Antwort.

★ iii. (4 Punkte) Es sei nun $T = T_{\max}$. Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\widehat{x}_s(f)$ von $x_s(t)$ in Abhängigkeit von $\widehat{x}(f)$ und $T_{\max}$.

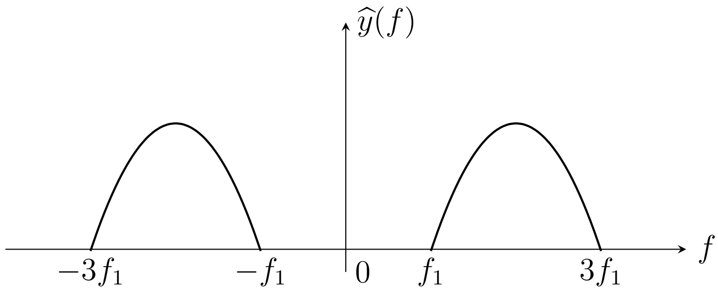
(b) (9 Punkte) Gegeben sei das System



wobei $T > 0$ die Abtastperiode ist, und der D/A-Wandler die Eingangs-Ausgangsbeziehung

$$y_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(kT)\delta(t - kT)$$

hat. Die Fouriertransformierte $\widehat{y}(f)$ von $y(t)$ ist im folgenden Diagramm dargestellt.

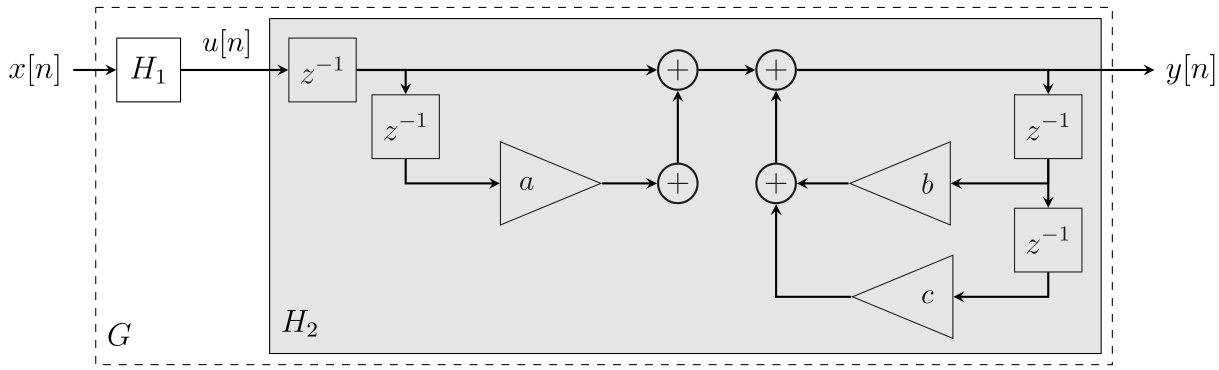


★ i. (5 Punkte) Skizzieren Sie die Fouriertransformierte $\widehat{y}_s(f)$ für die Abtastrate von $1/T = 2.5f_1$. Kann $y(t)$ eindeutig aus $y_s(t)$ rekonstruiert werden? Begründen Sie Ihre Antwort.

★ ii. (4 Punkte) Geben Sie die maximale Abtastperiode $T_{\max}$ an, so dass das abgetastete Signal $y_s(t)$ frei von Aliasing ist. Skizzieren Sie auch die Fouriertransformierte $\widehat{y}_s(f)$ für diese Abtastperiode $T_{\max}$.

Aufgabe 3 (25 Punkte)

Gegeben sei das folgende zeitdiskrete, kausale LTI-System G mit Eingangssignal $x[n]$ und Ausgangssignal $y[n]$.



Das System G besteht aus der Serienschaltung der beiden zeitdiskreten, kausalen LTI-Systeme H_1 und H_2, wobei die Übertragungsfunktion von H_1 gegeben ist durch

$$H_1(z) = \frac{(z-1)^2}{z^2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

★ (a) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Impulsantwort des Systems H_1.

★ (b) (4 Punkte) Bestimmen Sie anhand des Blockschaltbilds die Übertragungsfunktion $H_2(z)$ des Systems H_2 in Abhängigkeit von $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Nehmen Sie in weiterer Folge an, dass die Koeffizienten a, b, c so sind, dass

$$H_2(z) = \frac{z + \frac{1}{5}}{(z - \frac{1}{2})(z-1)}.$$

★ (c) (2 Punkte) Ist das Gesamtsystem G BIBO-stabil? Begründen Sie Ihre Antwort.

★ (d) (4 Punkte) Betrachten Sie das Eingangssignal $x[n] = \delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n-1]$ und bestimmen Sie das zugehörige Ausgangssignal $y[n] = (Gx)[n]$ des Gesamtsystems.

★ (e) (6 Punkte) Bestimmen Sie ein rechtsseitiges Eingangssignal $x'[n]$, sodass für das zugehörige Ausgangssignal $u[n]$ des Systems H_1 gilt $\delta[n] = u[n] = (H_1 x')[n]$.

★ (f) (6 Punkte) Bestimmen Sie die Impulsantwort des Systems H_2.

Aufgabe 4 (25 Punkte)

In dieser Aufgabe sind wir an der diskreten Fouriertransformation zwei-dimensionaler (2D) Signale $x : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{C}$ endlichen Trägers interessiert. Konkret seien $N, M \in \mathbb{N}$ und $x[n,m]$ ein zeitdiskretes 2D-Signal. Die zugehörige diskrete Fouriertransformierte ist definiert als

$$\hat{x} : k, \ell \mapsto \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} x[n,m] e^{-2\pi i k n/N} e^{-2\pi i \ell m/M}, \text{ für alle } k, \ell \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

★(a) (4 Punkte) Beweisen Sie, dass $\hat{x}$ periodisch ist gemäss

$$\hat{x}[k + uN, \ell + vM] = \hat{x}[k, \ell], \quad \forall k, \ell, u, v \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

★(b) (8 Punkte) Beweisen Sie, dass die inverse zwei-dimensionale diskrete Fouriertransformation gegeben ist durch

$$x[n,m] = \frac{1}{NM} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{M-1} \hat{x}[k,\ell] e^{2\pi i k n/N} e^{2\pi i \ell m/M}, \tag{3}$$

für $n = 0, \ldots, N-1$, $m = 0, \ldots, M-1$.

★(c) (8 Punkte) Ein zeitdiskretes 2D-Signal $x : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{C}$ wird als separierbar bezeichnet, wenn es in der Form $x[n,m] = x_1[n] x_2[m]$, $n, m \in \mathbb{Z}$, dargestellt werden kann, wobei $x_1, x_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$. Beweisen Sie, dass $x[n,m]$ separierbar ist dann und nur dann, wenn $\hat{x}[k,\ell]$ separierbar ist.

★(d) (3 Punkte) Es seien $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, so dass $0 \leq k_1 \leq N-1$ und $0 \leq k_2 \leq M-1$. Berechnen Sie die zwei-dimensionale diskrete Fouriertransformation des Signals $x[n,m] = e^{2\pi i \left(\frac{nk_1}{N} + \frac{mk_2}{M}\right)}$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

★(e) (2 Punkte) Angenommen dass $N = M = 50$, $k_1 = 10$, $k_2 = 5$ und $x[n,m] = e^{2\pi i \left(\frac{nk_1}{N} + \frac{mk_2}{M}\right)}$, für alle $n, m \in \mathbb{Z}$. Welches der folgenden beiden Bilder entspricht der diskreten 2D-Fouriertransformation von $x[n,m]$?