Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Professur für Mathematische Informationswissenschaften
Prof. Dr. Helmut Bölcskei

Lösung zur
Klausur zu Signal- und Systemtheorie I
26. August 2024

Aufgabe 1

(a) i. Aus Formel 34 in der Formelsammlung berechnen sich die Koeffizienten der Fourierreihe wie folgt

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-2\pi ikt/T}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{2t}e^{-2\pi ik\frac{t}{2\pi}}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2-ik}e^{(2-ik)t}\Big|_{t=-\pi}^{t=\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2-ik}\left(e^{(2-ik)\pi}-e^{-(2-ik)\pi}\right)
\end{aligned}$$

ii. Das Ausgangssignal $y(t)$ muss periodisch sein, da LTI-Systeme auf periodische Eingangssignale mit periodischen Ausgangssignalen antworten. Die Koeffizienten c'_k der Fourierreihe von $y(t)$ ergeben sich aus der Multiplikation der Koeffizienten c_k des Eingangssignals mit den Abtastwerten $\widehat{h}(k/T)$ des Frequenzgangs des Bandpassfilters. Im vorliegenden Fall überträgt das System nur die Frequenzen für $k=-3$ und $k=3$. Damit erhalten wir

$$y(t) = c'_{-3}e^{-6\pi it/T} + c'_3 e^{6\pi it/T},$$

wobei

$$\begin{aligned}
c'_{-3} &= \widehat{h}(-3/T)c_{-3} = \frac{1}{(2+3i)\pi}\left(e^{(2+3i)\pi}-e^{-(2+3i)\pi}\right) \\
c'_3 &= \widehat{h}(3/T)c_3 = \frac{1}{(2-3i)\pi}\left(e^{(2-3i)\pi}-e^{-(2-3i)\pi}\right).
\end{aligned}$$

(b) Wir verwenden die trigonometrische Gleichung

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y)+\cos(x+y)\right)$$

laut Hinweis und erhalten damit

$$\begin{aligned}
z(t) &= A\cos(2\pi t/T_a)\cdot B\cos(2\pi t/T_b)\\
&= \frac{1}{2}AB\left(\cos\left(\left(\frac{2\pi}{T_a}-\frac{2\pi}{T_b}\right)t\right)+\cos\left(\left(\frac{2\pi}{T_a}+\frac{2\pi}{T_b}\right)t\right)\right).
\end{aligned}$$

i. $T_a = T_b$

$$\begin{aligned}
z(t) &= \frac{1}{2}AB\left(\cos\left(\left(\frac{2\pi}{T_a}-\frac{2\pi}{T_a}\right)t\right)+\cos\left(\left(\frac{2\pi}{T_a}+\frac{2\pi}{T_a}\right)t\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}AB\left(1+\cos\left(\frac{4\pi}{T_a}t\right)\right) \qquad (1)
\end{aligned}$$

Das Signal $z(t)$ hat die Periode $T = T_a/2$. Wir schreiben die Fourierreihe um gemäss

$$\begin{aligned}
z(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi ikt/T}\\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(\cos(2\pi kt/T)+i\sin(2\pi kt/T))\\
&= c_0+\sum_{k=1}^{\infty}(c_k+c_{-k})\cos(2\pi kt/T)+\sum_{k=1}^{\infty} i(c_k-c_{-k})\sin(2\pi kt/T). \qquad (2)
\end{aligned}$$

Vergleicht man (1) mit (2), so erhält man

$$c_0 = \frac{1}{2}AB,$$

$$\begin{cases} c_1+c_{-1} &= \frac{1}{2}AB\\ c_1-c_{-1} &= 0\end{cases} \implies \quad c_1 = c_{-1} = \frac{1}{4}AB,$$

und für $k \geq 2$

$$\begin{cases} c_k+c_{-k} &= 0\\ c_k-c_{-k} &= 0\end{cases} \implies \quad c_k = c_{-k} = 0.$$

ii. $T_a = \frac{1}{2}T_b$

$$\begin{aligned}
z(t) &= \frac{1}{2}AB\left(\cos\left(\left(\frac{2\pi}{T_a}-\frac{2\pi}{2T_a}\right)t\right)+\cos\left(\left(\frac{2\pi}{T_a}+\frac{2\pi}{2T_a}\right)t\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}AB\left(\cos\left(\frac{\pi}{T_a}t\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{T_a}t\right)\right) \qquad (3)
\end{aligned}$$

Das Signal $z(t)$ hat die Periode $T = 2T_a$. Vergleicht man (3) mit (2), so erhält man

$$
\begin{aligned}
& c_0 = 0, \\
& \begin{cases} c_1 + c_{-1} & = \frac{1}{2}AB \\ c_1 - c_{-1} & = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad c_1 = c_{-1} = \frac{1}{4}AB, \\
& \begin{cases} c_3 + c_{-3} & = \frac{1}{2}AB \\ c_3 - c_{-3} & = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad c_3 = c_{-3} = \frac{1}{4}AB,
\end{aligned}
$$

und für $k = 2$ und $k \geq 4$,

$$
\begin{cases} c_k + c_{-k} & = 0 \\ c_k - c_{-k} & = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad c_k = c_{-k} = 0.
$$

iii. $T_a = 2T_b$

$$
\begin{aligned}
z(t) &= \frac{1}{2}AB\left(\cos\left(\left(\frac{2\pi}{T_a} - \frac{2\pi}{T_a/2}\right)t\right) + \cos\left(\left(\frac{2\pi}{T_a} + \frac{2\pi}{T_a/2}\right)t\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}AB\left(\cos\left(\frac{2\pi}{T_a}t\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{T_a}t\right)\right) \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Das Signal $z(t)$ hat die Periode $T = T_a$. Vergleicht man (4) mit (2), so erhält man

$$
\begin{aligned}
& c_0 = 0, \\
& \begin{cases} c_1 + c_{-1} & = \frac{1}{2}AB \\ c_1 - c_{-1} & = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad c_1 = c_{-1} = \frac{1}{4}AB, \\
& \begin{cases} c_3 + c_{-3} & = \frac{1}{2}AB \\ c_3 - c_{-3} & = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad c_3 = c_{-3} = \frac{1}{4}AB,
\end{aligned}
$$

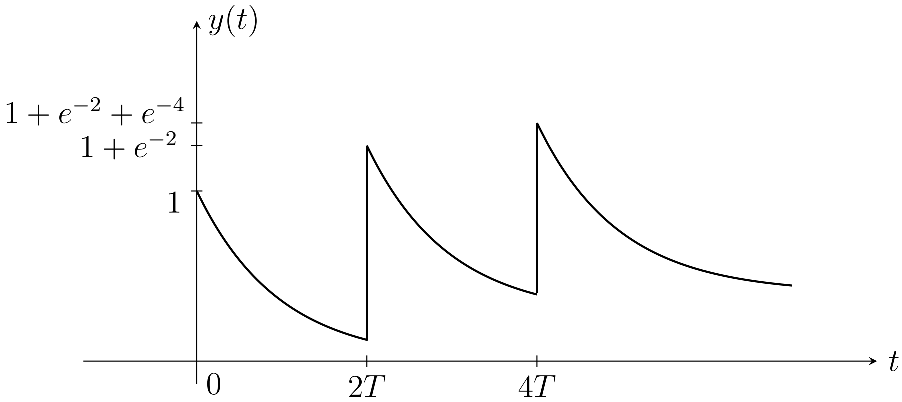
und für $k = 2$ und $k \geq 4$,

$$
\begin{cases} c_k + c_{-k} & = 0 \\ c_k - c_{-k} & = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad c_k = c_{-k} = 0.
$$

(c) i. Das Ausgangssignal $y(t)$ ergibt sich zu

$$
\begin{aligned}
y(t) &= h(t) * x(t) \\
&= h(t) * (\delta(t) + \delta(t-2T) + \delta(t-4T)) \\
&= h(t) + h(t-2T) + h(t-4T) \\
&= e^{-t/T}\sigma(t) + e^{-(t-2T)/T}\sigma(t-2T) + e^{-(t-4T)/T}\sigma(t-4T).
\end{aligned}
$$

ii. Die Funktion $y(t)$ kann wie folgt skizziert werden.

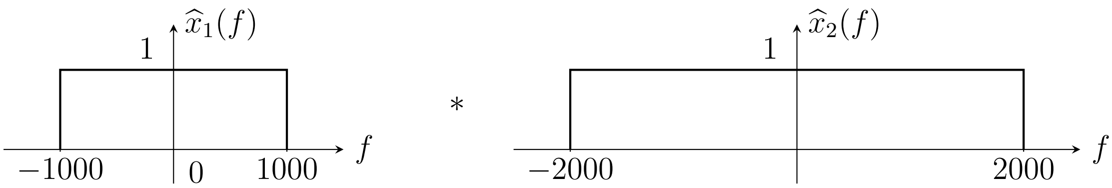


Aufgabe 2

(a) i. Die Fouriertransformierten $\widehat{x}_1(f)$ und $\widehat{x}_2(f)$ ergeben sich gemäss Gleichung 27 in der Formelsammlung als

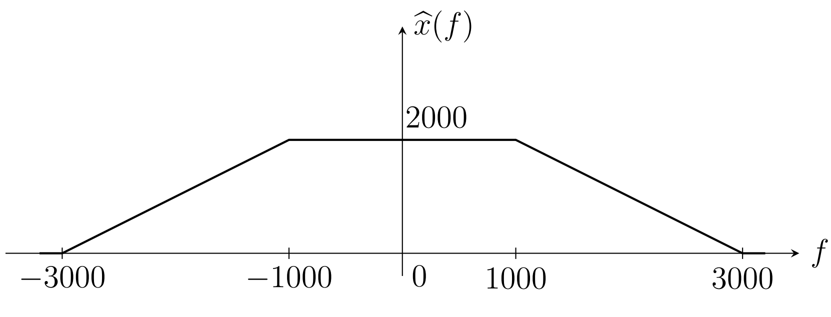
$$\widehat{x}_1(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq 1000 \\ 0, & |f| > 1000 \end{cases}$$
$$\widehat{x}_2(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq 2000 \\ 0, & |f| > 2000 \end{cases} .$$

Die Fouriertransformierte $\widehat{x}(f)$ können wir dank Gleichung 8 in der Formelsammlung durch (grafische) Faltung wie folgt bestimmen.



$$\begin{aligned} \widehat{x}(f) &= \widehat{x}_1(f) * \widehat{x}_2(f) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{x}_1(f-\tau)\widehat{x}_2(\tau)d\tau \\ &= \begin{cases} 0, & f < -3000 \\ \int_{-2000}^{f+1000} 1d\tau = f + 3000, & -3000 \leq f < -1000 \\ \int_{f-1000}^{f+1000} 1d\tau = 2000, & -1000 \leq f < 1000 \\ \int_{f-1000}^{2000} 1d\tau = -f + 3000, & 1000 \leq f < 3000 \\ 0, & f \geq 3000 \end{cases} . \end{aligned}$$

Somit erhalten wir die folgende Darstellung für $\widehat{x}(f)$:



ii. Das Signal $x(t)$ hat Bandbreite 3000. Nach dem Abtasttheorem kann $x(t)$ aus

$x_s(t)$ eindeutig rekonstruiert werden, wenn die Abtastperiode $1/T \geq 2 \cdot 3000$ erfüllt. Somit folgt

$$T_{\max} = 1/6000.$$

iii. Wir schreiben $x_s(t)$ gemäss

$$x_s(t) = x(t)p(t),$$

wobei

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_{\max}) \, .$$

Die Fouriertransformierte $\widehat{p}(f)$ von $p(t)$ ergibt sich gemäss Gleichung 20 in der Formelsammlung als

$$\widehat{p}(f) = \frac{1}{T_{\max}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta \left(f - \frac{k}{T_{\max}} \right) .$$

Aus Gleichung 8 in der Formelsammlung folgt somit

$$\widehat{x}_s(f) = (\widehat{x} * \widehat{p}\,)\,(f) = \frac{1}{T_{\max}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{x} \left(f - \frac{k}{T_{\max}} \right) .$$

(b) i. Wir schreiben $y_s(t)$ gemäss

$$y_s(t) = y(t)p(t),$$

wobei

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \, .$$

Die Fouriertransformierte $\widehat{p}(f)$ von $p(t)$ ergibt sich gemäss Gleichung 20 in der Formelsammlung als

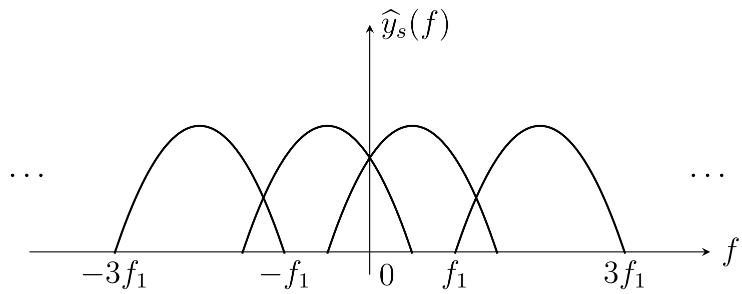
$$\widehat{p}(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta \left(f - \frac{k}{T} \right) .$$

Aus Gleichung 8 in der Formelsammlung folgt somit

$$\widehat{y}_s(f) = (\widehat{y} * \widehat{p}\,)(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{y} \left(f - \frac{k}{T} \right) .$$

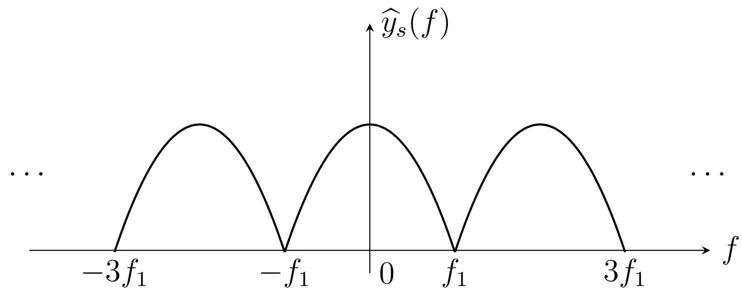
Mit der Abtastrate $1/T = 2.5f_1$ erhalten wir

$$\widehat{y}_s(f) = 2.5f_1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{y}\left(f - 2.5kf_1\right).$$



Da $\widehat{y}_s(f)$ Aliasing aufweist, kann $y(t)$ nicht eindeutig aus $y_s(t)$ rekonstruiert werden.

ii. Wie unten skizziert, ist $1/T = 2f_1$ die kleinste Abtastrate, so dass $\widehat{y}_s(f)$ frei von Aliasing ist.



Somit folgt

$$T_{\max} = \frac{1}{2f_1}.$$

Aufgabe 3

(a) Wir schreiben

$$\frac{(z-1)^2}{z^2} = 1 - 2z^{-1} + z^{-2}.$$

Mit den Formeln 95 und 105 in der Formelsammlung erhalten wir

$$h_1[n] = \delta[n] - 2\delta[n-1] + \delta[n-2].$$

(b) Wir lesen folgende Differenzengleichung aus dem Blockschaltbild ab

$$y[n] = u[n-1] + au[n-2] + by[n-1] + cy[n-2].$$

Unter Verwendung von Gleichung 95 in der Formelsammlung erhalten wir daraus

$$Y(z) = z^{-1}U(z) + az^{-2}U(z) + bz^{-1}Y(z) + cz^{-2}Y(z).$$

Dies schreiben wir gemäss

$$Y(z)(1 - bz^{-1} - cz^{-2}) = (z^{-1} + az^{-2})U(z)$$

woraus sich

$$Y(z) = \frac{z^{-1} + az^{-2}}{1 - bz^{-1} - cz^{-2}} U(z)$$

ergibt. Somit folgt

$$H_2(z) = \frac{z^{-1} + az^{-2}}{1 - bz^{-1} - cz^{-2}} = \frac{z + a}{z^2 - bz - c}.$$

(c) Die Übertragungsfunktion des Gesamtsystems ist gegeben durch

$$G(z) = H_1(z)H_2(z) = \frac{(z-1)^2}{z^2} \frac{z + \frac{1}{5}}{(z - \frac{1}{2})(z-1)} = \frac{(z-1)(z + \frac{1}{5})}{z^2(z - \frac{1}{2})}.$$

Da die Pole ($z = 0$ und $z = 1/2$) von G innerhalb des Einheitskreises liegen und das System gemäss Angabe kausal ist, folgt, dass G BIBO-stabil ist.

(d) Mit den Formeln 95 und 105 ergibt sich

$$x[n] = \delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n-1] \circ\!\!-\!\!\bullet\ 1 - \frac{1}{2}z^{-1} = X(z)$$

und somit

$$\begin{aligned}
Y(z) &= G(z)X(z) \\
&= \frac{(z-1)(z+\frac{1}{5})}{z^2(z-\frac{1}{2})}(1-\frac{1}{2}z^{-1}) \\
&= \frac{(z-1)(z+\frac{1}{5})}{z^2(z-\frac{1}{2})}\frac{(z-\frac{1}{2})}{z} \\
&= \frac{(z-1)(z+\frac{1}{5})}{z^3} \\
&= \frac{z^2-\frac{4}{5}z-\frac{1}{5}}{z^3} \\
&= z^{-1}-\frac{4}{5}z^{-2}-\frac{1}{5}z^{-3}.
\end{aligned}$$

Daraus erhalten wir nun $y[n] = \delta[n-1] - \frac{4}{5}\delta[n-2] - \frac{1}{5}\delta[n-3]$.

(e) Die Bedingung

$$\delta[n] = (H_1 x')[n]$$

entspricht im z-Bereich

$$1 = H_1(z)X'(z) = \frac{(z-1)^2}{z^2}X'(z).$$

Somit muss gelten

$$X'(z) = \frac{z}{(z-1)}\frac{z}{(z-1)},$$

mit ROC $|z| > 1$ um ein rechtsseitiges Signal zu erhalten. Unter Verwendung der Formeln 106 und 102 in der Formelsammlung ergibt sich also

$$x'[n] = (\sigma * \sigma)[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sigma[n-k]\sigma[k] = \sigma[n]\sum_{k=0}^{n} 1 = (n+1)\sigma[n].$$

(f) Wir bestimmen die Partialbruchzerlegung von

$$H_2(z) = \frac{z+\frac{1}{5}}{(z-\frac{1}{2})(z-1)}.$$

Der Grad des Zählers ist kleiner als der des Nenners. Daher ist die Partialbruchzerlegung von der folgenden Form:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{A}{z-\frac{1}{2}} + \frac{B}{z-1}, && \text{mit} \\ A &= \left(z-\frac{1}{2}\right) H(z)\Big|_{z=\frac{1}{2}} = -\frac{7}{5} && \text{und} \\ B &= (z-1)\, H(z)\big|_{z=1} = \frac{12}{5} && . \end{aligned}$$

Zusammenfassend erhalten wir

$$H(z) = \frac{1}{5} z^{-1} \left(12 \frac{z}{z-1} - 7 \frac{z}{z-\frac{1}{2}}\right).$$

Damit das System kausal ist, muss $h[n] = 0,\ \forall n < 0$, gelten und $h[n]$ somit rechtsseitig sein. Damit muss das Konvergenzgebiet von $H(z)$ als $|z| > 1$ gewählt werden. Mit den Formeln 94, 95, 106 und 108 in der Formelsammlung erhalten wir schliesslich

$$h[n] = \frac{1}{5}\left[12\sigma[n-1] - 7\sigma[n-1]\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right].$$

Aufgabe 4

(a) Es seien $k, \ell, u, v \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
\hat{x}[k+uN, \ell+vM] &= \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1} x[n,m] e^{-2\pi i(k+uN)n/N} e^{-2\pi i(\ell+vM)m/M} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1} x[n,m] e^{-2\pi ikn/N} e^{-2\pi iun} e^{-2\pi i\ell m/M} e^{-2\pi ivm} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1} x[n,m] e^{-2\pi ikn/N} e^{-2\pi i\ell m/M} \qquad (5)\\
&= \hat{x}[k,\ell]. \qquad (6)
\end{aligned}$$

(b) Es seien $n, m \in \mathbb{Z}$, so dass $0 \leq n \leq N-1$ und $0 \leq m \leq M-1$. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{\ell=0}^{M-1} \hat{x}[k,\ell] e^{2\pi ikn/N} e^{2\pi i\ell m/M} \qquad (7)\\
&= \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{\ell=0}^{M-1}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{M-1} \left(x[u,v] e^{-2\pi iku/N} e^{-2\pi i\ell v/M} e^{2\pi ikn/N} e^{2\pi i\ell m/M}\right) \qquad (8)\\
&= \sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{M-1} \left(x[u,v]\left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{-2\pi ik(u-n)/N}\right)\left(\sum_{\ell=0}^{M-1} e^{-2\pi i\ell(v-m)/M}\right)\right). \qquad (9)
\end{aligned}$$

Nun verwenden wir die Summenformel für die endliche geometrische Reihe um zu schliessen, dass

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{-2\pi ik(u-n)/N} = N\delta_N[u-n], \qquad (10)$$

und

$$\sum_{\ell=0}^{M-1} e^{-2\pi i\ell(v-m)/M} = M\delta_M[v-m], \qquad (11)$$

wobei $\delta_N[k] := \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \delta[k-\ell N]$. Einsetzen von (10) und (11) in (a) liefert schliesslich

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{\ell=0}^{M-1} \hat{x}[k,\ell] e^{2\pi ikn/N} e^{2\pi i\ell m/M} &= \sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{M-1} x[u,v] N\delta_N[u-n] M\delta_M[v-m] \qquad (12)\\
&= NMx[n,m]. \qquad (13)
\end{aligned}$$

(c) Wir nehmen an, dass $x[n,m]$ separierbar ist. Damit existieren $x_1, x_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, so dass $x[n,m] = x_1[n]x_2[m]$, $n,m \in \mathbb{Z}$. Es folgt nun

$$\hat{x}[k,\ell] = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1} x_1[n]x_2[m]e^{-2\pi ikn/N}e^{-2\pi i\ell m/M} \tag{14}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x_1[n]e^{-2\pi ikn/N}\sum_{m=0}^{M-1} x_2[m]e^{-2\pi i\ell m/M} = \hat{x}_1[k]\hat{x}_2[\ell], \tag{15}$$

wobei $\hat{x}_1$ und $\hat{x}_2$ die DFT von x_1 und x_2, respektive, ist. Damit ist gezeigt, dass $\hat{x}[k,\ell]$ separierbar ist.

Nun nehmen wir an, dass $\hat{x}[k,\ell]$ separierbar ist. Damit existieren $\hat{x}_1, \hat{x}_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, so dass $\hat{x}[k,\ell] = \hat{x}_1[k]\hat{x}_2[\ell]$, $k,\ell \in \mathbb{Z}$. Es folgt

$$x[n,m] = \frac{1}{NM}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{\ell=0}^{M-1} \hat{x}_1[k]\hat{x}_2[\ell]e^{2\pi ikn/N}e^{2\pi i\ell m/M} \tag{16}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}_1[k]e^{2\pi ikn/N}\frac{1}{M}\sum_{\ell=0}^{M-1} \hat{x}_2[\ell]e^{2\pi i\ell m/M} = x_1[n]x_2[m], \tag{17}$$

womit gezeigt ist, dass $x[n,m]$ separierbar ist.

(d) Wir berechnen

$$\hat{x}[k,\ell] = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1} e^{2\pi i\left(\frac{nk_1}{N}+\frac{mk_2}{M}\right)}e^{-2\pi ikn/N}e^{-2\pi i\ell m/M} \tag{18}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\pi i(k-k_1)n/N}\sum_{m=0}^{M-1} e^{-2\pi i(\ell-k_2)m/M} \tag{19}$$

$$= NM\delta_N[k-k_1]\delta_M[\ell-k_2], \tag{20}$$

wobei im letzten Schritt wieder die Summenformel (10) verwendet wurde.

(e) Aus (20) folgt direkt, dass das rechte Bild $\hat{x}$ entspricht.