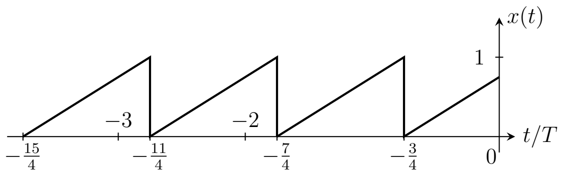
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Professur für Mathematische Informationswissenschaften
Prof. Dr. Helmut Bölcskei

Lösung zur
Klausur zu Signal- und Systemtheorie I
7. Februar 2025

Aufgabe 1

(a) i. Wir erhalten den Graphen von $x(t)$ in den Intervallen $[-\frac{15}{4}T, -\frac{11}{4}T]$ und $[-\frac{11}{4}T, -\frac{7}{4}T]$ gemäss



Die Funktionsgleichung zu $x(t)$ im Intervall $[-3T, -2T]$ ergibt sich damit als

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{T}(t + \frac{15}{4}T), & -3T \leq t \leq -\frac{11}{4}T \\ \frac{1}{T}(t + \frac{11}{4}T), & -\frac{11}{4}T < t \leq -2T \end{cases}.$$

ii. Aus Formel 34 in der Formelsammlung berechnen sich die Koeffizienten der Fourierreihe wie folgt

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{3}{4}T}^{\frac{1}{4}T} x(t)e^{-2\pi ikt/T}\,dt \\ &= \frac{1}{T^2}\int_{-\frac{3}{4}T}^{\frac{1}{4}T} \left(t + \frac{3}{4}T\right) e^{-2\pi ikt/T}\,dt \\ &= \frac{1}{T^2}\int_0^T te^{-2\pi ik(t-\frac{3}{4}T)/T}\,dt \\ &= \frac{1}{T^2}e^{\frac{3}{2}\pi ik}\left(\frac{1}{-2\pi ik/T}te^{-2\pi ikt/T}\Big|_0^T - \frac{1}{(2\pi ik/T)^2}e^{-2\pi ikt/T}\Big|_0^T\right) \\ &= \frac{1}{T^2}e^{\frac{3}{2}\pi ik}\frac{T^2}{-2\pi ik} \\ &= \frac{e^{\frac{3}{2}\pi ik}}{-2\pi ik}, \end{aligned}$$

für $k \neq 0$, und für $k = 0$,

$$c_0 = \frac{1}{T^2}\int_0^T t\,dt = \frac{1}{2}.$$

(b) Aus Formel 1 in der Formelsammlung berechnet sich die Fouriertransformierte $\widehat{y}(f)$ wie folgt

$$\widehat{y}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-2\pi ift}dt.$$

Das Signal $y(t)$ hat vier Abschnitte. Wir berechnen das Integral demgemäss in vier Teilen:

$$\widehat{y}_1(f) = \int_{-\infty}^{0} y(t)e^{-2\pi ift}dt = 0$$

$$\begin{aligned}
\widehat{y}_2(f) &= \int_{0}^{2} y(t)e^{-2\pi ift}dt \\
&= \int_{0}^{2} \frac{3}{2}t\; e^{-2\pi ift}dt \\
&= \frac{3}{2}\frac{1}{(2\pi if)^2}(-2\pi ift - 1)e^{-2\pi ift}\Big|_{t=0}^{t=2} \\
&= \frac{3}{8\pi^2 f^2}((4\pi if + 1)e^{-4\pi if} - 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{y}_3(f) &= \int_{2}^{4} y(t)e^{-2\pi ift}dt \\
&= \int_{2}^{4} (-t+5)e^{-2\pi ift}dt \\
&= \frac{1}{(2\pi if)^2}(2\pi ift + 1)e^{-2\pi ift}\Big|_{t=2}^{t=4} + \frac{5}{-2\pi if}\,e^{-2\pi ift}\Big|_{t=2}^{t=4} \\
&= -\frac{1}{4\pi^2 f^2}(8\pi if + 1)e^{-8\pi if} + \frac{1}{4\pi^2 f^2}(4\pi if + 1)e^{-4\pi if} \\
&\qquad - \frac{5}{2\pi if}e^{-8\pi if} + \frac{5}{2\pi if}e^{-4\pi if} \\
&= -\frac{1}{4\pi^2 f^2}(-2\pi if + 1)e^{-8\pi if} + \frac{1}{4\pi^2 f^2}(-6\pi if + 1)e^{-4\pi if}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{y}_4(f) &= \int_{4}^{\infty} e^{-5(t-4)}e^{-2\pi ift}dt \\
&= \frac{1}{-2\pi if - 5}e^{-5(t-4)}e^{-2\pi ift}\Big|_{t=4}^{t=\infty} \\
&= \frac{1}{2\pi if + 5}e^{-8\pi if}
\end{aligned}$$

Die Fouriertransformierte $\widehat{y}(f)$ ergibt sich insgesamt zu

$$\widehat{y}(f) = \widehat{y}_1(f) + \widehat{y}_2(f) + \widehat{y}_3(f) + \widehat{y}_4(f).$$

(c) i. Die Koeffizienten c_k der Fourierreihe von $y_1(t)$ ergeben sich durch Multiplikation der Fourierreihenkoeffizienten des Eingangssignals $x_1(t)$ mit den Abtastwerten $\widehat{h}(kf_0)$ des Frequenzgangs des Filters. Im vorliegenden Fall überträgt das System nur die Frequenzen für $-4 \leq k \leq 4$. Damit erhalten wir

$$c_k = 0, \quad \text{für } |k| \geq 5.$$

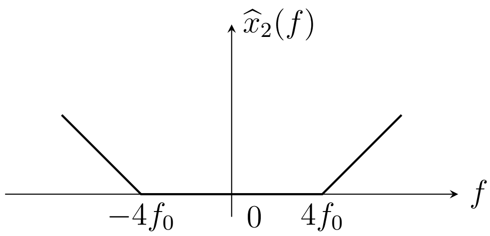
Wir berechnen den Wert von c_k für $|k| \leq 4$ gemäss

$$c_k = \frac{4\sin^2(k\pi/2)}{k^2\pi^2}\cos(k\pi/8)$$

und erhalten

$$\begin{aligned} c_1 &= c_{-1} = \frac{4}{\pi^2}\cos(\pi/8) \\ c_2 &= c_{-2} = 0 \\ c_3 &= c_{-3} = \frac{4}{9\pi^2}\cos(3\pi/8) \\ c_4 &= c_{-4} = 0. \end{aligned}$$

ii.



Die Fouriertransformierte $\widehat{y}_2(f)$ ergibt sich zu

$$\widehat{y}_2(f) = \widehat{x}_2(f)\widehat{h}(f).$$

Da $\widehat{x}_2(f) = 0$ für $|f| \leq 4f_0$ und $\widehat{h}(f) = 0$ für $|f| \geq 4f_0$ gilt, ist $\widehat{y}_2(f) = 0$, für alle $f \in \mathbb{R}$. Es folgt damit $y_2(t) = 0$, für alle $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2

(a) Wir schreiben $x(t)$ zunächst in der Form

$$x(t) = \frac{\sin(2\pi t)}{\pi t} e^{2\pi i t}.$$

Mit Hilfe von Formel 3 in der Formelsammlung für $f_0 = 1$ und Formel 27 in der Formelsammlung für $f_c = 1$ erhalten wir

$$\hat{x}(f) = \begin{cases} 1, & \text{für } f \in [0, 2] \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{1}$$

(b) Mit Hilfe von Formel 20 in der Formelsammlung für $T_0 = \lambda$ ergibt sich für die Fouriertransformierte $\hat{z}_\lambda(f)$ von $z_\lambda(t)$ die Darstellung

$$\hat{z}_\lambda(f) = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\Big(f - \frac{k}{\lambda}\Big). \tag{2}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \hat{g}_\lambda(f) &= (\hat{x} * \hat{z}_\lambda)(f) && (3) \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}\Big(f - \frac{k}{\lambda}\Big). && (4) \end{aligned}$$

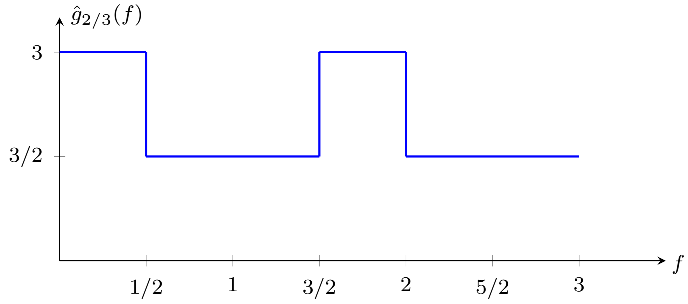
Wir betrachten nun den Spezialfall $\lambda = 2/3$. Aus (1) erhalten wir

$$\hat{x}\Big(f - \frac{3k}{2}\Big) = \begin{cases} 1, & \text{für alle } f \in [3k/2, 2 + 3k/2] \\ 0, & \text{für alle } f \notin [3k/2, 2 + 3k/2], \end{cases} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}. \tag{5}$$

Mit Hilfe von (5) und (3)–(4) für $\lambda = 2/3$ erhält man schliesslich

$$\begin{aligned} \hat{g}_{2/3}(f) &= \frac{3}{2}\Big(\hat{x}\Big(f + \frac{3}{2}\Big) + \hat{x}(f)\Big) = 3, && \text{für alle } f \in [0, 1/2] && (6) \\ \hat{g}_{2/3}(f) &= \frac{3}{2}\hat{x}(f) = 3/2, && \text{für alle } f \in (1/2, 3/2) && (7) \\ \hat{g}_{2/3}(f) &= \frac{3}{2}\Big(\hat{x}(f) + \hat{x}\Big(f - \frac{3}{2}\Big)\Big) = 3, && \text{für alle } f \in [3/2, 2] \\ \hat{g}_{2/3}(f) &= \frac{3}{2}\hat{x}\Big(f - \frac{3}{2}\Big) = 3/2, && \text{für alle } f \in (2, 3]. \end{aligned}$$

Der Graph von $\hat{g}_{2/3}(f)$ sieht deshalb wie folgt aus:



(c) Das Abtasttheorem besagt, dass ein bandbegrenztes Signal aus seinen Abtastwerten rekonstruiert werden kann, sofern die Abtastfrequenz mindestens doppelt so gross ist wie die (einseitige) Bandbreite des Signals .

(d) Aus dem Graphen des Signals $\hat{g}_{2/3}(f)$ erkennt man, dass bei Abtastung mit der Frequenz $3/2$ [Hz] Überlappungen im Frequenzbereich auftreten. Daher kann das Signal $x(t)$ nicht aus seinen Abtastwerten $x(2k/3)$, $k \in \mathbb{Z}$, rekonstruiert werden. .

(e) Aus (3)–(4) folgt, dass $\hat{g}_{2/3}(f)$ $(3/2)$-periodisch ist. Die zugehörige Fourierreihe ist somit durch

$$\hat{g}_{2/3}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, e^{4\pi i k f/3}$$

gegeben. Mit Hilfe von Formel 34 in der Formelsammlung für $T = 3/2$ erhalten wir

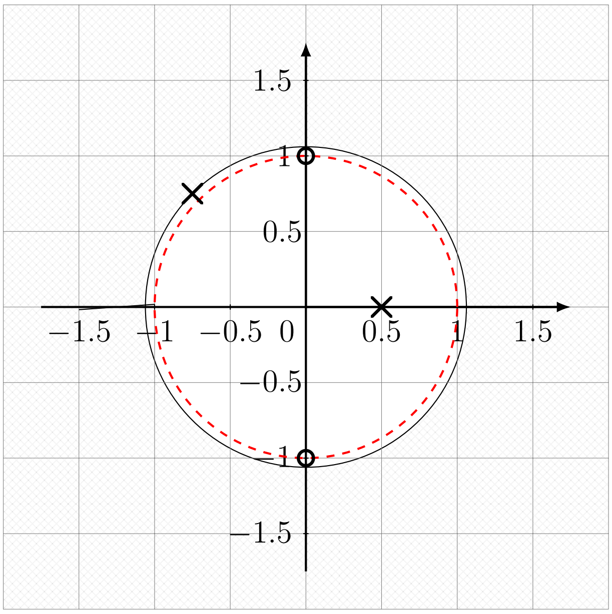
$$\begin{aligned} c_k &= \frac{2}{3}\int_0^{3/2} \hat{g}_{2/3}(f) e^{-4\pi i k f/3}\,\mathrm{d}f && (8) \\ &= 2\int_0^{1/2} e^{-4\pi i k f/3}\,\mathrm{d}f + \int_{1/2}^{3/2} e^{-4\pi i k f/3}\,\mathrm{d}f && (9) \\ &= \int_0^{1/2} e^{-4\pi i k f/3}\,\mathrm{d}f + \int_0^{3/2} e^{-4\pi i k f/3}\,\mathrm{d}f, && (10) \end{aligned}$$

wobei in (9) die Gleichungen (6) und (7) verwendet wurden. Für $k = 0$ ergibt (8)–(10) $c_0 = 2$. Für die restlichen Fourierkoeffizienten erhalten wir mit Hilfe von (8)–(10)

$$\begin{aligned} c_k &= -\frac{3e^{-4\pi i k f/3}}{4\pi i k}\bigg|_0^{1/2} - \frac{3e^{-4\pi i k f/3}}{4\pi i k}\bigg|_0^{3/2} \\ &= \frac{3}{4\pi i k}\left(1 - e^{-2\pi i k/3}\right) + \frac{3}{4\pi i k}\underbrace{\left(1 - e^{-2\pi i k}\right)}_{=0} \\ &= \frac{3}{2\pi k} e^{-\pi i k/3}\sin(\pi k/3), \quad \text{für alle } k \neq 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 3

(a) i. Die Nullstellen befinden sich bei $\mathring{z}_1 = i$ und $\mathring{z}_2 = -i$, und die Pole bei $z_1 = -\frac{3}{4} + \frac{3}{4}i$ und $z_2 = \frac{1}{2}$. Da das System gemäss Angabe kausal ist, ergibt sich als Konvergenzgebiet $|z| > \left|-\frac{3}{4} + \frac{3}{4}i\right| = \sqrt{\frac{18}{16}}$. Somit ergibt sich folgendes Diagramm.



ii. Das Konvergenzgebiet $|z| > \left|-\frac{3}{4} + \frac{3}{4}i\right| = \sqrt{\frac{18}{16}}$ enthält den Einheitskreis nicht. Somit ist das System nicht BIBO-stabil.

iii. Mit den Formeln 95 und 108 aus der Formelsammlung ergibt sich

$$X(z) = \frac{z}{z-i} - \left(\frac{3}{4}i - \frac{3}{4}\right) z^{-1} \frac{z}{z-i}, \qquad |z| > 1.$$

Dies kann umgeformt werden zu

$$X(z) = \frac{z - \left(\frac{3}{4}i - \frac{3}{4}\right)}{z - i}.$$

Die $\mathcal{Z}$-Transformierte des Ausgangssignals ist somit gegeben durch

$$\begin{aligned} Y(z) = H(z)X(z) &= \frac{(z-i)(z+i)}{\left(z - \left(\frac{3}{4}i - \frac{3}{4}\right)\right)\left(z - \frac{1}{2}\right)} \frac{z - \left(\frac{3}{4}i - \frac{3}{4}\right)}{z - i} \\ &= \frac{z+i}{\left(z - \frac{1}{2}\right)} = \frac{z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)} + z^{-1} i \frac{z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)}, \qquad |z| > \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Das ROC von $Y(z)$ muss $|z| > 1/2$ sein, da $y[n]$ aufgrund der Kausalität von H und der Rechtsseitigkeit von $x[n]$, rechtsseitig sein muss. Mit den Formeln

95 und 108 aus der Formelsammlung ergibt sich das Ausgangssignal nun zu

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sigma[n] + i\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \sigma[n-1].$$

iv. Unter Verwendung von Formel 96 in der Formelsammlung ergibt sich

$$G(z) = \frac{\left(\frac{z}{a}\right)^2 + 1}{\left(\left(\frac{z}{a}\right) - \left(\frac{3}{4}i - \frac{3}{4}\right)\right)\left(\left(\frac{z}{a}\right) - \frac{1}{2}\right)}.$$

Wir multiplizieren Zähler und Nenner mit a^2 und erhalten

$$G(z) = \frac{z^2 + a^2}{\left(z - \left(\frac{3}{4}i - \frac{3}{4}\right)a\right)\left(z - \frac{1}{2}a\right)}.$$

Somit hat das System die Pole $z_1 = \left(-\frac{3}{4} + \frac{3}{4}i\right)a$ und $z_2 = \frac{1}{2}a$. Da H kausal ist, muss G ebenfalls kausal sein und das Konvergenzgebiet ist somit gegeben durch $|z| > \left|-\frac{3}{4}a + \frac{3}{4}ai\right| = |a|\sqrt{\frac{18}{16}}$. Damit das System BIBO-stabil ist, muss der Einheitskreis im Konvergenzgebiet enthalten sein. Dies ist der Fall wenn $|a| < \sqrt{\frac{16}{18}}$.

(b) Wir erkennen, dass das Blockschaltbild die Parallelschaltung zweier Systeme darstellt und führen dadurch motiviert eine Partialbruchzerlegung durch, um die Übertragungsfunktion in der Form $H(z) = H_1(z) + H_2(z)$ zu schreiben. Da der Grad des Zählers von $H(z)$ kleiner ist als der des Nenners, hat die Partialbruchzerlegung die allgemeine Form

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{A_1}{z + \frac{2}{3}} + \frac{A_2}{z + \frac{1}{2}}, && \text{mit} \\ A_1 &= \left(z + \frac{2}{3}\right) H(z)\Big|_{z=-\frac{2}{3}} = -2 && \text{und} \\ A_2 &= \left(z + \frac{1}{2}\right) H(z)\Big|_{z=-\frac{1}{2}} = 3 && . \end{aligned}$$

Es gilt also

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z) = \frac{-2}{z + \frac{2}{3}} + \frac{3}{z + \frac{1}{2}}. \tag{11}$$

Wir bemerken nun, dass sich der obere Teil des Blockschaltbildes mit H_1 identifizieren lässt und zwar gemäss

$$(H_1 x)[n] = a_1 x[n-1] - \frac{2}{3}(H_1 x)[n-1],$$

was unter Verwendung der Gleichungen 94 und 95 in der Formelsammlung zu

$$H_1(z)X(z) = a_1 z^{-1} X(z) - \frac{2}{3} z^{-1} H_1(z) X(z)$$

führt und damit

$$H_1(z) = \frac{a_1 z^{-1}}{1 + \frac{2}{3} z^{-1}} = \frac{a_1}{z + \frac{2}{3}},$$

liefert. Koeffizientenvergleich mit (11) ergibt nun $a_1 = -2$. Das untere System folgt der Differenzengleichung

$$(H_2 x)[n] = a_2 x[n-1] - \frac{1}{2}(H_2 x)[n-1],$$

was

$$H_2(z)X(z) = a_2 z^{-1} X(z) - \frac{1}{2} z^{-1} H_2(z) X(z)$$

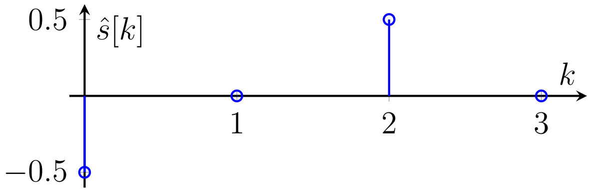
entspricht . Dies ergibt nun

$$H_2(z) = \frac{a_2 z^{-1}}{1 + \frac{1}{2} z^{-1}} = \frac{a_2}{z + \frac{1}{2}}.$$

Koeffizientenvergleich mit (11) liefert $a_2 = 3$.

Aufgabe 4

(a) i. Das Signal $\hat{s}[k]$ kann für $N = 4$ wie folgt skizziert werden.



Wir schreiben für $k \in \{0, \dots, N-1\}$

$$\begin{aligned}\hat{s}[k] &= \sin^2\left(\frac{\pi k}{N}\right) - \frac{1}{2} \\ &= \left(\frac{1}{2i}\left(e^{i\pi k/N} - e^{-i\pi k/N}\right)\right)^2 - \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{4}\left(e^{2i\pi k/N} - 2 + e^{-2i\pi k/N}\right) - \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{4}e^{2i\pi k/N} - \frac{1}{4}e^{-2i\pi k/N}.\end{aligned}$$

Anwendung der Gleichungen 77 und 90 in der Formelsammlung liefert nun

$$s[n] = -\frac{1}{4}\delta[n+1] - \frac{1}{4}\delta[n-1], \quad n \in \{0, \dots, N-1\}.$$

ii. Aus den Gleichungen 77 und 90 in der Formelsammlung ergibt sich

$$h_a[n] = a\delta[n-1], \quad n \in \{0, \dots, N-1\}. \tag{12}$$

Berechnen wir nun die inverse N-Punkt DFT auf beiden Seiten von (4) aus der Aufgabenstellung, so erhalten wir unter Verwendung der Gleichungen 82, 77 und 90 in der Formelsammlung, dass

$$Ns[n]h_a[n] = \delta[n-1], \quad n \in \{0, \dots, N-1\}. \tag{13}$$

Setzen wir (12) sowie das Ergebnis aus Teilaufgabe (a)(i) in (13) ein, folgt $a = -4/N$.

(b) Da $x[n]$ reellwertig ist, folgt aus Gleichung 79 in der Formelsammlung, dass $\hat{x}[k] = \hat{x}^*[-k]$ gelten muss. Insbesondere bedeutet dies, dass der Imaginärteil von $\hat{x}[0]$ und $\hat{x}[2]$ verschwindet, also $\mathfrak{Im}\{\hat{x}[0]\} = \mathfrak{Im}\{\hat{x}[2]\} = 0$. Des Weiteren gilt aufgrund der 4-Periodizität von $\hat{x}[k]$, dass $\hat{x}[1] = \hat{x}^*[-1] = \hat{x}^*[3]$. Somit ergibt sich direkt aus der zweiten zu erfüllenden Eigenschaft, dass

$$\hat{x}[k] = \delta[k] + (2+ia)\delta[k-1] + (2-ia)\delta[k-3], \quad k \in \{0, 1, 2, 3\},$$

mit zu bestimmendem $a \in \mathbb{R}$. Unter Verwendung von Gleichung 87 in der Formelsammlung erhalten wir nun

$$x[n] = \frac{1}{4} + \frac{2+ia}{4}\, e^{\pi i n/2} + \frac{2-ia}{4}\, e^{3\pi i n/2}, \quad n \in \{0,1,2,3\}.$$

Auswerten an der Stelle $n = 3$ liefert

$$x[3] = \frac{1}{4} - i\frac{2+ia}{4} + i\frac{2-ia}{4} = \frac{1}{4} + \frac{a}{2}$$

und damit, wegen $x[3] = 0$, $a = -\frac{1}{2}$. Das gesuchte Signal lautet somit

$$x[n] = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - i\frac{1}{8}\right) e^{\pi i n/2} + \left(\frac{1}{2} + i\frac{1}{8}\right) e^{3\pi i n/2}, \quad n \in \{0,1,2,3\}.$$

(c) Wir verwenden die Definition der N-Punkt DFT und berechnen für $\ell \in \{0,\dots,N-1\}$

$$\begin{aligned}\hat{\hat{x}}[\ell] = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}[k] e^{-2\pi i k\ell/N} &= \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-2\pi i k n/N} e^{-2\pi i k\ell/N}\\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \sum_{k=0}^{N-1} e^{-2\pi i k(\ell+n)/N}\\ &= N\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\delta[n+\ell]\\ &= N x[-\ell].\end{aligned}$$

(d) Sei $x[n]$ ein N-periodisches Signal. Wir schreiben es in Vektorform als $\mathbf{x} = (x[0],\dots,x[N-1])^T \in \mathbb{C}^N$. Beachten Sie zunächst, dass der Vektor $\operatorname{diag}(\hat{u})\, \mathbf{F}_N^H \mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ dem Signal entspricht, welches durch punktweise Multiplikation des Signals $\hat{u}[k]$ mit dem zu $\mathbf{F}_N^H\mathbf{x}$ assoziierten Signal resultiert. Des Weiteren merken wir an, dass $\operatorname{circ}\left(\hat{\hat{u}}\right)\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ das aus der Faltung von $\hat{\hat{u}}[n]$ mit $x[n]$ resultierende Signal darstellt. Daher gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\mathbf{F}_N \operatorname{diag}(\hat{u})\, \mathbf{F}_N^H \mathbf{x} &= \frac{1}{N}\operatorname{circ}\left(\hat{\hat{u}}\right)\mathbf{x} &(14)\\ &= \frac{1}{N}\operatorname{circ}(Nv)\,\mathbf{x} &(15)\\ &= \operatorname{circ}(v)\,\mathbf{x},\end{aligned}$$

wobei wir in (14) Gleichung 82 in der Formelsammlung sowie die Identität $\frac{1}{N}\mathbf{F}_N\mathbf{F}_N^H = \mathbf{I}_N$ verwendet haben. Gleichung (15) folgt unmittelbar aus dem Resultat von Teilaufgabe (c) sowie der Definition von $v[n]$. Da $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ beliebig gewählt werden kann, folgt daraus die gewünschte Identität.